第 3 节 诱导公式（★★）

内容提要

本节主要归纳诱导公式相关的应用，诱导公式有下面的六组：

①$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$，$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$，$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

②$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

③$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

④$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

⑤$\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$，$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$.

⑥$\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$，$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$.

诱导公式主要用于化掉$\sin(\dfrac{k\pi}{2}\pm\alpha)$，$\cos(\dfrac{k\pi}{2}\pm\alpha)$，$\tan(\dfrac{k\pi}{2}\pm\alpha)$中的$\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$这个部分，其口诀为“奇变偶不变，符号看象限”，此口诀有两点需注意：

①奇变偶不变指要化掉的若是$\dfrac{\pi}{2}$的奇数倍，则函数名正弦变余弦，余弦变正弦；偶数倍则不变；

②符号看象限，是看原来的三角函数名在对应象限的符号，例如，对$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)$化简时，符号看象限，看

的是$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$这个第二象限的角（其中α看成锐角）的余弦值的符号，显然为负，所以添负号，得到$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$.

典型例题

类型Ⅰ：利用诱导公式化简求值

【例 1】$\sin 600^\circ=$_____.

解法 1：$\sin 600^\circ=\sin(540^\circ+60^\circ)$，接下来用诱导公式化掉 540°，

首先，“奇变偶不变”，540°是90°的 6 倍，属偶数倍，所以“偶不变”，化去540°后函数名仍为“sin”；其次，“符号看象限”，将60°看成锐角，$540^\circ+$锐角在第三象限，正弦为负，所以添个负号，

故$\sin 600^\circ=-\sin 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：也可在 600° 上先减 720°，再用$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$求值，

$\sin 600^\circ=\sin(600^\circ-720^\circ)=\sin(-120^\circ)=-\sin 120^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【反思】若三角代数式中的角可拆分出90°的整数倍，则可用诱导公式将这部分化掉.

【变式 1】设 $\cos 29^{\circ}=m$，则 $\sin 241^{\circ}\tan 151^{\circ}=$（　　）

（A）$\sqrt{1+m^2}$　　（B）$\sqrt{1-m^2}$　　（C）$-\sqrt{1+m^2}$　　（D）$-\sqrt{1-m^2}$

解析： 已知的是 $\cos 29^{\circ}$，所以把 241° 和 151° 用诱导公式向 29° 转化，$241^{\circ}=270^{\circ}-29^{\circ}$，$151^{\circ}=180^{\circ}-29^{\circ}$，

$\sin 241^{\circ}\tan 151^{\circ}=\sin(270^{\circ}-29^{\circ})\tan(180^{\circ}-29^{\circ})=-\cos 29^{\circ}(-\tan 29^{\circ})=\sin 29^{\circ}=\sqrt{1-\cos^2 29^{\circ}}=\sqrt{1-m^2}$.

答案： B

【变式 2】已知 $f(x)=\dfrac{\sin(2\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(3\pi-x)\sin(\frac{11\pi}{2}-x)}$，则 $f(-\frac{21\pi}{4})=$______.

解析： 所给解析式中 2π、$\frac{3\pi}{2}$、3π、$\frac{11\pi}{2}$ 均为 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍，可用诱导公式将其化简，再求值，

由题意，$f(x)=\dfrac{\sin(2\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(3\pi-x)\sin(\frac{11\pi}{2}-x)}=\dfrac{-\sin x\sin x}{-\cos x(-\cos x)}=-\tan^2 x$，

而 $\tan(-\frac{21\pi}{4})=\tan(-5\pi-\frac{\pi}{4})=\tan(-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$，所以 $f(-\frac{21\pi}{4})=-\tan^2(-\frac{21\pi}{4})=-(-1)^2=-1$.

答案： -1

【变式 3】$\cos 1^{\circ}+\cos 2^{\circ}+\cos 3^{\circ}+\cdots+\cos 180^{\circ}=$______.

解析： 所给的表达式中，像 $\cos 1^{\circ}$，$\cos 2^{\circ}$ 这些项都无法单独求出，只能考虑与其它项结合计算，注意到 $\cos 1^{\circ}+\cos 179^{\circ}=\cos 1^{\circ}+\cos(180^{\circ}-1^{\circ})=\cos 1^{\circ}+(-\cos 1^{\circ})=0$，同理，$\cos 2^{\circ}+\cos 178^{\circ}=0$，$\cos 3^{\circ}+\cos 177^{\circ}=0$ 等等，所以采取两两组合的方法计算，为了更清晰地呈现计算过程，我们用倒序相加法，

记 $S=\cos 1^{\circ}+\cos 2^{\circ}+\cos 3^{\circ}+\cdots+\cos 179^{\circ}$，则 $S=\cos 179^{\circ}+\cos 178^{\circ}+\cos 177^{\circ}+\cdots+\cos 1^{\circ}$，

两式相加可得 $2S=(\cos 1^{\circ}+\cos 179^{\circ})+(\cos 2^{\circ}+\cos 178^{\circ})+(\cos 3^{\circ}+\cos 177^{\circ})+\cdots+(\cos 179^{\circ}+\cos 1^{\circ})=0$，

所以 $S=0$，故 $\cos 1^{\circ}+\cos 2^{\circ}+\cos 3^{\circ}+\cdots+\cos 180^{\circ}=S+\cos 180^{\circ}=\cos 180^{\circ}=-1$.

答案： -1

类型 II：用诱导公式解决给值求值问题

【例 2】已知 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$-\frac{3}{4}$　　（D）$\pm\frac{3}{4}$

解析： 看到 $\frac{\pi}{2}+\alpha$，先用诱导公式把 $\frac{\pi}{2}$ 化掉，$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha<0$，从而 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，故 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

答案：B

【例 3】已知 $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=$______.

解析：给值求值问题，应先寻找已知角和求值角的联系，可将已知的角换元成 t，方便观察联系，

设 $t=\frac{\pi}{6}+\alpha$，则 $\alpha=t-\frac{\pi}{6}$，且 $\sin t=\frac{1}{3}$，所以 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=\sin(\frac{2\pi}{3}+t-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$，

已知 $\sin t$ 求 $\cos t$，得研究 t 的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $t\in(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6})$，从而 $\cos t<0$，故 $\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，即 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

答案：$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【总结】给值求值问题，不要盲目地将已知条件展开，而是先尝试寻找条件和结论的角的联系.

强化训练

1.（2022 • 成都模拟 • ★★）已知 $\tan\theta=2$，则 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$______.

2.（2022 •襄阳模拟 •★★）已知函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$，且 $f(3)=3$，则 $f(2022)$ 的值为（　　）

（A）-1（B）1　（C）3　（D）-3

3.（2022 • 自贡期末 • ★★）已知 $\sin(\frac{\pi}{5}-x)=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=$______.

4.（2022 • 湖南模拟 • ★★）已知 $\cos(\frac{5\pi}{12}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则 $\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$（B）$\frac{1}{3}$（C）$-\frac{1}{3}$（D）$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5．（2022・山西二模・★★★）若$\sin 10^\circ = a\sin 100^\circ$，则$\sin 20^\circ =$（　　）

（A）$\dfrac{a}{a^2+1}$　　（B）$-\dfrac{a}{a^2+1}$　　（C）$\dfrac{2a}{a^2+1}$　　（D）$-\dfrac{2a}{a^2+1}$

6．（★★★）计算：

（1）$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ =$______；（2）$\dfrac{\lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \cdots + \lg(\tan 89^\circ)}{\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ} =$______.